УДК 519.87:004.421.2:(556.332:550.42)

ОБОСНОВАНИЕ УСТОЙЧИВОЙ РАСЧЕТНОЙ ЯВНОЙ КОНЕЧНОРАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ ИСХОДНОЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СОВМЕСТНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МИГРАЦИИ ЖИДКИХ УГЛЕВОДОРОДОВ И ПОДЗЕМНОЙ ВЛАГИ В ГРУНТАХ ЗОНЫ АЭРАЦИИ

А. Б. Ситников

Наведена фізико-математична модель сумісної міграції рідких легких вуглеводнів і підземної вологи в ненасичено-насичених грунтах зони аерації у вигляді системи нелінійних міграційних диференціальних рівнянь, які в загальному випадку не мають точного розв'язання. Для їхньої реалізації, точніше, їх скінченнорізницевої апроксимації, пропонується декілька розрахункових явних скінченнорізницевих схем розв'язань. Щоб довести потрібну стійку збіжність із заданою точністю розв'язання до єдино можливого результату, нами пропонується методика послідовних ітераційних розрахунків за рекомендованими формулами окремо кожного з міграційних рівнянь. На конкретному прикладі 2-метрового моноліта грунту досліджується найбільш ефективна явна схема стійкого та збіжного розв'язання рівнянь у загальному випадку неусталеної міграції рідких гасу та підземної вологи при граничних умовах I і II родів з урахуванням початкової відсутності у грунтах вуглеводню, але потім повного насичення ним.

Ключові слова: зона аерації, грунт, гас, вода, міграція, поверхневий натяг, тиск, об'ємний вміст, рух, прогнозні розрахунки, збіжність, однозначність.

Изложена физико-математическая модель совместной миграции жидких легких углеводородов и подземной влаги в ненасыщенно-насыщенных грунтах зоны аэрации в виде системы нелинейных миграционных дифференциальных уравнений, в общем случае не имеющих точного решения. Для их реализации, точнее, их конечноразностной аппроксимации, предлагается несколько расчетных явных конечноразностных схем решения. Чтобы доказать требуемую устойчивую сходимость с заданной точностью решения к единственно возможному результату, нами предлагается методика последовательных итерационных расчетов по рекомендованным формулам каждого в отдельности из миграционных уравнений. На конкретном примере 2-метрового монолита грунтов исследуется наиболее эффективная явная схема устойчивого и сходимого решения уравнений в общем случае неустановившейся миграции жидких керосина и подземной влаги при граничных условиях I и II родов с учетом первоначального отсутствия в них углеводорода, но затем полного насыщения им.

Ключевые слова: зона аэрации, грунт, керосин, вода, миграция, поверхностное натяжение, давление, объемные содержания, движение, прогнозные расчеты, сходимость, однозначность.

The physic-mathematical model for the joint migration of light hydrocarbons and underground moisture into unsaturated – saturated soils within the aeration zone as the nonlinear migration differentiation equations system, which aren't in general the accurate solution are considered. In order to realize the finite-difference approximation for these equations it's proposed a few calculation explicit difference schemes for their solutions. The required stable convergence with the fixed accuracy of the solution to the unique possible result assumes the successive iterative calculations according to our recommended formulae for each migration equation separately that we have proved. The case study with the 2-m soil monolith allows examining the most effective explicit scheme for the stable and convergent solution of the equations in the general case for the unstable migration of liquid kerosene and underground moisture under the boundary conditions of the first and second kinds in the primary absence of hydrocarbon and then the full saturation by it.

Key words: aeration zone, soils, kerosene, water, migration, interfacial tension, pressure, volume content, motion, predictive calculations, convergence, uniqueness.

Прежде всего напомним основные, высказанные нами, утверждения [4, 5], что наиболее универсальными для эффективной реализации физико-математических моделей совместной нелинейной миграции жидких нефтепродуктов и подземной воды в ненасыщенно-насыщенных водою грунтах зоны аэрации являются конечноразностные уравнения, аппроксимирующие эти модели, представляющие собой, в свою очередь, систему дифференциальных уравнений пространственно-временных изменений состояния этих веществ при соответствующих начальных и разного рода граничных условиях. Хотя такая конечноразностная замена предполагает появление свойственных ей ошибок, зато принципиально целенаправленным изменением значений пространственных и временных шагов можно добиться при эпигнозном или прогнозном решении минимальных погрешностей за счет дискретности именно пространства и времени. Указанная возможность хотя и трудоемка, но позволяет количественно с требуемой точностью охарактеризовать исследуемый процесс совместной миграции, в то время как решение исходных систем дифференциальных (или интегральных) уравнений, непрерывно описывающих природную обстановку, чаще всего не представляется возможным в связи с отсутствием достоверных аналитических расчетных формул. Кстати, современные вычислительные машины, тем более компьютерные цифровые, по своим техническим показателям в наибольшей степени приемлемы для дискретных конечноразностных решений.

Однако обратим внимание, что для конкретного однозначно корректного решения исходных конечноразностных уравнений, тем более, если применять наиболее рациональный явный метод, необходимо доказать, согласно требованиям Адамара, устойчивость и сходимость этого метода [2, 6]. При этом так называемый устойчивый неявный метод решения при его реализации на цифровых вычислительных машинах может также оказаться неустойчивым, в частности по причине не предвиденного накопления ошибок округления и деления на числа, близкие к нулю [2, 4].

Несомненно, за исключением частных упрощенных случаев, исследуемая нами система миграционных дифференциальных нелинейных уравнений совместной миграции двух указанных жидкостей не имеет точных решений, и может быть реализована только их конечноразностная аппроксимирующая модель.

Подробное обоснование физико-математических моделей совместной миграции влаги и нефтепродуктов в ненасыщенно-насыщенных грунтах приведено в работе [5].

Покажем методику обоснования устойчивой и сходимой явной конечноразностной схемы прогнозного решения на примере одномерной вертикальной совместной неустановившейся миграции жидких керосина и подземной воды в 2-метровом монолите грунтов при отсутствии внутренних источников изменения этих веществ с учетом граничных условий I и II родов. Подчеркнем, что параметры миграции веществ и пористой грунтовой среды отвечают требованиям достоверности: известна их физико-химическая сущность, детерминизм, компетентность объемов и времени опытного определения параметров с известными максимально возможными погрешностями [4], позволяющими охарактеризовать хотя бы худший пессимистический результат решения.

Чтобы доказать сходимость решения, необходимо сравнить результаты решения с известными тестовыми. За таковые принимаются прежде всего равновесное состояние исследуемых веществ, а также не противоречащее логике временное изменение содержания керосина в расчетных точках. Кратко напомним изложенное в работах [4, 5], ограничившись лишь наиболее важными положениями.

Так, с физико-математической точки зрения на рассмотрение предлагается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)}{\partial t} = \frac{\partial W_p}{\partial \frac{p_{вс}}{\gamma_p}} \cdot \frac{\partial \overline{\Phi}_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right) \cdot \frac{\partial \overline{\Phi}_p}{\partial z}\right] + i_p;$$

$$\overline{\Phi}_p = \frac{p_{вс}}{\gamma_p} + \frac{p_{изб}}{\gamma_p} + z_z \quad p_{вс} = p_p - p_{атм};$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial t}=\frac{\partial W_i}{\partial \frac{p_{изб}}{\gamma_i}}\cdot\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[К_i(W_i)\cdot\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}\right]+i_i;$$

$$\Phi_i=\frac{p_{изб}}{\gamma_i}+z_z;\ \ p_{изб}=p_i-p_{атм},$$

где $W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)$ – относительное объемное содержание подземной влаги (точнее, подземного жидкого водного раствора), доли; W_i – относительное объемное содержание жидкого керосина, доли; $К_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)$ – так называемый обобщенный коэффициент переноса жидкой влаги, м/сут; $К_i$ (W_i) – обобщенный коэффициент переноса керосина, м/сут; p_p – давление подземной влаги, Па; $p_{изб}$ – избыточное (без атмосферного) давление керосина, Па; $p_{вс}$ – так называемое всасывающее давление подземной жидкой влаги, Па; γ_p и γ_i – объемные веса соответственно жидкой влаги и керосина, кг/м^3; i_p и i_i– так называемые внутренние источники жидких влаги и керосина, 1/сут.

При этом начальные условия характеризуются отсутствием керосина и покоем влаги, но с учетом изменения поверхностного натяжения жидкой влаги за счет условного первоначального молекулярного насыщения углеводородом. В виде граничных условий рекомендуется использовать на границах монолита постоянное граничное условие I рода, т. е. функции $\overline{\Phi}_p^{гран}$, $\overline{\Phi}_i^{гран}$, а также II рода, т. е. $\frac{\partial \overline{\Phi}_p^{гран}}{\partial z}=0$, $\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}=0$, точнее см. в табл. 2–4.

Специфика изучаемых процессов, согласно работам [1, 4, 5], определяет такие соотношения:

$$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)1.3=\beta_2\frac{p_{изб}}{\gamma_p}=\beta_2\frac{\gamma_i}{\gamma_p}\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)=\frac{1}{\beta_{2.3}}\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)2.3;$$

$$\beta_2=\frac{\sigma_{1.3}}{\sigma_{1.2}};\ \ \beta_{2.3}=\frac{\sigma_{1.3}-\sigma_{1.2}}{\sigma_{1.3}};$$

$$W_i\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)=W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_i}\right)-W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)2.3;$$

$$К_i(W_i)=\frac{\nu_p}{\nu_i}К_p(W_p)1.3;\ \ W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)1.3,$$

где ν_p, ν_i – кинематические вязкости воды и нефтепродуктов, $\sigma_{1.2}$ – поверхностное натяжение воды и керосина; 1 – воздух, 2 – углеводород, 3 – вода, 4 – твердое тело.

$$\text{При } W_i=0,\ \ W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)=W_p\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right),$$

$$\text{т. е. } \frac{p_{изб}}{\gamma_i}=\frac{\gamma_p}{\gamma_i\beta_2\beta_{2.3}}\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)2.3=\frac{\gamma_p}{\beta_2\gamma_i}\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)1.3.$$

Известными экспериментально определяемыми являются лишь параметры, поверхностное натяжение $\sigma_{1.3}$ и $\sigma_{1.2}$, а также объемные веса γ_p и γ_i и кинематические вязкости ν_p, ν_i , зависящие, в свою очередь, от температуры, плотности веществ (массовой концентрации): ($\sigma_T=\sigma_0-\alpha\Delta T$), $\nu=\eta/\rho$, $\gamma=\rho g$, где ρ – плотность, кг/м^3 ; g – ускорение свободного падения, м/с^2; $\alpha_{воды}$ = =0,1541$\cdot$ 10^{-3} Н/°К, $\alpha_{бенз}$ = 0,1183$\cdot$ 10^{-3} Н/°К, ΔT – изменение температуры, °К; σ_0 – стандартное поверхностное натяжение, Н/м.

Предлагаются в несколько преобразованном виде конечноразностные замены вышеуказанных миграционных уравнений по явной схеме [2, 5], являющиеся по сути основными прогнозными расчетными формулами:

при n = 1, 2, 3 ... N-1, N

$$(\Phi_i)_z^n=\frac{(К_i)_{z+1/2}^{n-1}\cdot(\Phi_i)_{z+1}^{n-1}+(К_i)_{z-1/2}^{n-1}\cdot(\Phi_i)_{z-1}^{n-1}+\frac{\Delta z^2}{\Delta t}(D_i)_z^{n-1}\cdot(\Phi_i)_z^{\tau}}{(К_i)_{z+1/2}^{n-1}+(К_i)_{z-1/2}^{n-1}+\frac{\Delta z^2}{\Delta t}(D_i)_z^{n-1}};$$

$$(D_i)_z^{n-1}=\frac{(W_i)_z^{n-1}-(W_i)_z^{\tau}}{(\Phi_i)_z^{n-1}-(\Phi_i)_z^{\tau}};$$

при m = 1, 2, 3 ... M-1, M

$$(\overline{\Phi}_p)_z^m=\frac{(К_p)_{z+1/2}^{m-1}\cdot(\overline{\Phi}_p)_{z+1}^{m-1}+(К_p)_{z-1/2}^{m-1}\cdot(\overline{\Phi}_p)_{z-1}^{m-1}+\frac{\Delta z^2}{\Delta t}(D_p)_z^{m-1}\cdot(\overline{\Phi}_p)_z^{\tau}}{(К_p)_{z+1/2}^{m-1}+(К_p)_{z-1/2}^{m-1}+\frac{\Delta z^2}{\Delta t}(D_p)_z^{m-1}};$$

$$\left(D_p\right)_z^{m-1} = \frac{\left(W_p\right)_z^{m-1} - \left(W_p\right)_z^{\tau}}{\left(\overline{\Phi}_p\right)_z^{m-1} - \left(\overline{\Phi}_p\right)_z^{\tau}},$$

где n, m – соответствующие номера итерационных расчетов (последовательных приближений); $\Delta t = t^{\tau+1} - t^{\tau}$, $\Delta z = z_{z+1} - z_z = z_z - z_{z-1}$ – соответственно временной и пространственный шаги расчетной сетки, $\tau+1$ τ – конечный и начальный моменты времени, сут; z_z, $z_{z\pm1}$ – вертикальные координаты точек, м; $z \pm {}^1/_2$ – координата посредине между расчетными точками, м; n-1, m-1 – предыдущая итерация.

Принятые допущения при итерационных расчетах уравнений:

– по изменению состояния углеводородов (керосина) $W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^{\tau} 2.3$ и $\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^{\tau} 2.3$ – const;

– по влаге $\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_p}\right)^{N} = 0{,}73\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)^{N}$ и Φ_i – const.

Определяемыми величинами являются $(\Phi_i)_z^N$, $(W_i)_z^N$ с точностью $\delta_i^* = \left|(\Phi_i)_z^{N-1} - (\Phi_i)_z^N\right| \le$ $\le 0{,}001$ м и $\delta_i^{**} = \left|(W_i)_z^N - (W_i)_z^{N-1}\right| \le 0{,}001$, а также $(\overline{\Phi}_p)_z^M$, $(W_p)_z^M$ с точностью $\delta_p^* = \left|(\overline{\Phi}_p)_z^M - (\overline{\Phi}_p)_z^{M-1}\right| \le 0{,}001$ м или $\delta_p^{**} = \left|(W_p)_z^M - (W_p)_z^{M-1}\right| \le 0{,}001$.

Время определения $\Delta t = \infty$; 0,1; 0,04; 0,0004 сут при $\Delta z = 0{,}2$ м – const, $z_{10} - z_0 = 2{,}0$ м – const; начальные относительные объемные влагосодержания рассчитываются при $\Phi_p^{\tau} = 0{,}4$ м – const; начальные относительные объемные содержания керосина равны нулю.

За исходные истинные принимаются взятые из литературных источников [1, 4, 7]:

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_p} = 0{,}73 \text{ (согласно } \rho_{керосина} = 730 \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho_p = 1000 \text{ кг/м}^3, g = 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}),$$

$$\frac{\upsilon_p}{\nu_i} = 0{,}8 \; (\nu_i = 1{,}2525\cdot 10\frac{\text{Па}}{\text{с}},\; \nu_p = 1{,}002\cdot 10\frac{\text{Па}}{\text{с}});$$

$$\sigma_{1.3} = 72{,}75\cdot 10^{-3} \text{ н/м},\; \sigma_{1.2} = 27{,}4 : 10^{-3} \text{ н/м}.$$

За исходные экспериментальные дискретные параметры, приведенные в работах [3, 4], $W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)1.3$ и $K\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)1.3$ принимаются по табл. 1.

Т а б л и ц а 1. **Значения известных экспериментальных параметров**

j	$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_J^{1.3}$	$W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_J^{1.3}$	$K_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_J^{1.3}$
	$p_{вс}$1.3	Wp1.3	Kp1.3
	$\ge 0{,}000$	0,340	5,0000
0	0,0000	0,340	5,0000
1	-0,100	0,340	5,0000
2	-0,175	0,336	4,5000
3	-0,275	0,324	3,3000
4	-0,400	0,308	1,8000
5	-0,475	0,285	1,1500
6	-0,575	0,238	0,4800
7	-0,675	0,185	0,3340
8	-0,750	0,130	0,2240
9	-0,825	0,100	0,1600
10	-0,925	0,062	0,0700
11	-0,975	0,055	0,0300
12	-1,075	0,048	0,0040
13	-1,125	0,045	0,0030
14	-1,325	0,042	0,0010
15	-2,500	0,027	0,00006
16	-3,300	0,021	0,00003
17	-4,500	0,013	0,00001
18	-5,500	0,010	0,00000
19	-6,000	0,010	0,00000
	$\le -6{,}000$	0,010	0,00000

Последовательность рекомендуемых итерационных расчетов уравнения по миграции керосина от расчетной точки 9 до 1.

Вначале определяем начальные значения относительных объемных влагосодержаний "τ", затем для первой итерации, так называемой нулевой n – 1 = 0, по следующим формулам:

$$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^{\tau}_{z,z\pm1/2} 2.3 = (\Phi_p)_z^{\tau} - z_z = 0{,}4 - z_z - \text{const},$$

$$\text{аналогично для } \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^{\tau}_{z\pm1/2} \qquad (1)$$

$$j+1 \le \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^{\tau}_{z,z\pm1/2} 2.3 \cdot 1{,}605136437 \le j, \text{ по табл. 1};$$

(2)

$$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3 \qquad \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j}$$

$$(W_p)_{j+1}\, 1.3 \qquad (W_p)_j\, 1.3$$

$$W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_z^\tau 2.3=\frac{(W_p)_j 1.3-(W_p)_{j+1} 1.3}{\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j-\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3}\left[\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_z^\tau\times\right.$$

$$\left.\times 2.3\times 1{,}6051364376-\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3\right]+ \qquad (3)$$

$$+(W_p)_{j+1} 1.3 - \text{const, аналогично для } W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{z\pm 1/2}^\tau .$$

Затем определяем $(\Phi_i)_z^\tau$ при $(W_i)_z^\tau = 0$;

$$\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_z^\tau=0{,}828179675\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_z^\tau 2.3 \quad - \text{ const}, \qquad (4)$$

т. к. $\left(W_i\right)_z^\tau=0$;

$$\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{9+1/2}^0=0{,}5\left[\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{10}^{гран}+\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_9^\tau\right] \quad - \text{ const}; \qquad (5)$$

$$j+1\le\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{9+1/2}^0\cdot 1{,}93815\le j \text{, по табл. 1}; \qquad (6)$$

$$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3 \qquad \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j 1.3$$

$$(W_p)_{j+1} 1.3 \qquad (W_p)_j 1.3$$

$$W_p\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{9+1/2}^0=\frac{(W_p)_j 1.3-(W_p)_{j+1} 1.3}{\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j 1.3-\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3}\left[\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{9+1/2}^0\times\right. \qquad (7)$$

$$\left.\times 1{,}93815-\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3\right]+(W_p)_{j+1} 1.3;$$

$$(W_i)_{g+1/2}^0=W_p\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{9+1/2}^0-W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_i}\right)_{9+1/2}^\tau 2.3; \qquad (8)$$

$$j+1\le (W_i)_{9+1/2}^0\le j \text{, по табл. 1};$$

$$(W_p)_{j+1} 1.3 \qquad (W_p)_j 1.3 \qquad (9)$$

$$(K_p)_{j+1} 1.3 \qquad (K_p)_j 1.3$$

$$K_i(W_i)_{9+1/2}^0=\frac{0{,}8\left[(K_p)_j 1.3-(K_p)_{j+1} 1.3\right]}{(W_p)_j 1.3-(W_p)_{j+1} 1.3}\times \qquad (10)$$

$$\times\left[(W_i)_{9+1/2}^\tau-(W_p)_{j+1} 1.3\right]+0{,}8(K_p)_{j+1} 1.3;$$

$$(\Phi_i)_z^\tau=\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_z^\tau+z_z \quad - \text{ const}; \qquad (11)$$

$$(D_i)_z^{n-1}=0. \qquad (12)$$

Теперь по предыдущим значениям определяем величины на вторую итерацию (т. е. n-1 = 2-1 = 1), далее, методически повторяясь, на n = 3, 4 и т. д.

$$(\Phi_i)_z^n=\frac{(K_i)_{z+1/2}^{n-1}\cdot(\Phi_i)_{z+1}^{n-1}+(K_i)_{z-1/2}^{n-1}\times}{(K_i)_{z+1/2}^{n-1}+(K_i)_{z-1/2}^{n-1}+} \qquad (13)$$

$$\frac{\times\,\Phi_i)_{z-1}^{n-1}+(D_i)_z^{n-1}\cdot(\Phi_i)_z^\tau\cdot\frac{\Delta z^2}{\Delta t}}{+(D_i)_z^{n-1}\cdot\frac{\Delta z^2}{\Delta t}};$$

$$\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{z,}^n=(\Phi_i)_z^n-z_z \text{ и } \left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{z\pm 1/2}^n= \qquad (14)$$

$$=0{,}5\left[\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_z^n+\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{z\pm 1}^n\right];$$

$$j+1\le\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_z^n\cdot 1{,}93815\le j, \qquad (15)$$

$$\text{аналогично для } \left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{z\pm 1/2}^n, \quad \text{по табл. 1};$$

$$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3 \qquad \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j 1.3$$

$$(W_p)_{j+1} 1.3 \qquad (W_p)_j 1.3$$

$$W_p\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_z^n = \frac{(W_p)_j\,1.3-\left(W_p\right)_{j+1}1.3}{\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j 1.3-\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3}\left[\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_z^n\times\right.$$

$$\left.\times 1{,}93815-\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3\right]+(W_p)_{j+1}\,1.3, \qquad (16)$$

аналогично рассчитываем $W_p\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_{z\pm1/2}^n$;

$$\left(W_i\right)_z^n = W_p\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_i}\right)_z^n - W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_i}\right)_z^\tau 2.3\,, \qquad (17)$$

аналогично для $\left(W_i\right)_{z\pm1/2}^n$;

$$j+1\le\left(W_i\right)_z^n\le j\text{, по табл. 1;} \qquad (18)$$

$\left(W_p\right)_{j+1}1.3 \quad \left(W_p\right)_j 1.3$

$(K_p)_{j+1}\,1.3 \quad (K_p)_j\,1.3$, аналогично для $\left(W_i\right)_{z\pm1/2}^n$;

$$\left(K_i\right)_{z\pm1/2}^n = \frac{0{,}8\left[(K_p)_j\,1.3-(K_p)_{j+1}\,1.3\right]}{(W_p)_{j+1}\,1.3-(W_p)_j\,1.3}\times$$

$$\times\left[(W_i)_{z\pm1/2}^n-(W_p)_{j+1}1.3\right]+0{,}8(K_p)_{j+1}\,1.3; \qquad (19)$$

$$(D_i)_z^{n-1} = \frac{\left(W_i\right)_z^n-\left(W_i\right)_0^\tau}{(\Phi_i)_z^n-(\Phi_i)_z^0}=0\,. \qquad (20)$$

Наконец, определив с требуемой точностью $(\Phi_i)_z^N$, $(W_i)_z^N$, $(W_p)_z^N = (W_p)_z^\tau$ сравниваем с конечным теоретическим тестовым решением, согласно которому $(\Phi_i)_z^N = 2{,}0$ м в расчетных точках.

Пока фронт мигрирующего керосина не достиг полностью насыщенный водою грунт, заполнив воздушные поры, значения $(W_i)_z^N$ и $(W_p)_z^\tau$ близки к истинным. Однако при полном насыщении порового пространства керосином и водой, очевидно, потребуется решение уравнений по воде, так как должно видоизмениться избыточное давление влаги и соответственно содержание керосина. Чтобы оценить возможные изменения их содержания, требуется решить уравнение по миграции подземной влаги.

<u>Последовательность итерационных расчетов уравнения по миграции влаги.</u>

$(\overline{\Phi}_p)_z^m$ от z = (9) до z = (1) расчетной точки выполняется согласно рекомендуемым формулам:

$$\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_p}\right)_z^N = 0{,}73\ -\text{const},\ \ (\Phi_i)_z^N=2{,}0\text{ м (для }\Delta t=\infty); \qquad (1^*)$$

$$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_z^N 2.3 = 0{,}4-z_z; \qquad (2^*)$$

$$j+1\le\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_z^N 2.3\ \cdot 1{,}6051364373\le j\text{, по табл. 1;} \qquad (3^*)$$

$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3 \qquad \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j$

$\left(W_p\right)_{j+1}1.3 \qquad \left(W_p\right)_j$;

$$\left(W_p\right)_z^N = W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_z^N 2.3 = \frac{\left(W_p\right)_j 1.3-\left(W_p\right)_{j+1}2.3}{\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j 1.3-\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j-1} 2.3}\times$$

$$\times\left[\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_z^N 2.3\ \cdot 1{,}605136437-\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3\right]+ \qquad (4^*)$$

$$+\left(W_p\right)_{j+1}1.3;$$

$$\left(W_i\right)_z^N = 0{,}34-\left(W_p\right)_z^N; \qquad (5^*)$$

$$\left(K_p\right)_{9+1/2}^{гран}= 0{,}0\ \ -\text{const},\ (\Phi_p)_0^{гран} = 1{,}568000\text{ м }-$$

$$-\text{const}\ \ \text{ или }\ (\Phi_p)_{1/2}^{гран} = 1{,}568000\text{ м }-\text{const}; \qquad (6^*)$$

$$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{z\pm1/2}^N = \left[\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_z^N+\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{z\pm1}^N\right]; \qquad (7^*)$$

$$j+1\le\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{z+1/2}^N\cdot 1{,}6051364373\le j\text{, по табл. 1;} \qquad (8^*)$$

$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3 \qquad \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j 1.3$

$(K_p)_{j+1}1.3 \qquad (K_p)_j 1.3$

$$K_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^N_{z+1/2} = \frac{(K_p)_j 1.3 - (K_p)_{j+1} 1.3}{\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j 1.3 - \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3}\left[\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^N_{z+1/2} \times \right. \quad (9^*)$$

$$\left. \times 1{,}605136437 - \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3\right] + (K_p)_{j+1} 1.3;$$

$$(\overline{\Phi}_p)^N_z = \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^N_z + \left(\frac{p_{изб}}{\gamma_p}\right)^N_z + z_z; \quad (10^*)$$

$$(D_p)^N_z = 0{,}03; \quad (11^*)$$

$$(\overline{\Phi}_p)^0_z = \frac{(K_p)^N_{z+1/2} \cdot (\overline{\Phi}_p)^N_{z+1} + (K_p)^N_{z-1/2} \times (\overline{\Phi}_p)^N_{z-1} + (D_p)^N_z \cdot \frac{\Delta z^2}{\Delta t} \cdot (\Phi_p)^N_я}{(K_p)^N_{z+1/2} + (K_p)^N_{z-1/2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta t} \cdot (D_p)^N_я}; \quad (12^*)$$

$$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^0_z 2.3 = (\overline{\Phi}_p)^0_z - \left(\frac{p_{изб}}{\gamma_p}\right)^0_z - z_z, \quad (13^*)$$

где 0 – то же, что при m = 1;

$$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^0_{z\pm1/2} 2.3 = \left[\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_z 2.3 + \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{z\pm1} 2.3\right] \cdot 0{,}5; \quad (14^*)$$

$$j+1 \le \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^0_{z,z+1/2} 2.3 \cdot 1{,}6051364373 \le j \text{, по табл. 1;} \quad (15^*)$$

$$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3; \qquad \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j 1.3$$

$$(K_p)_{j+1} 1.3 \qquad (K_p)_j 1.3;$$

$$W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^0_z 2.3 = \frac{(W_p)_j 1.3 - (W_p)_{j+1} 1.3}{\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j 1.3 - \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j-1} 1.3} \times \quad (16^*)$$

$$\times \left[\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^0_z 2.3 \times 1{,}605136437 - \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3\right] +$$

$$+ (W_p)_{j+1} 1.3;$$

$$K_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^0_{z+1/2} = \frac{(K_p)_j 1.3 - (K_p)_{j+1} 1.3}{\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_j 1.3 - \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3} \times \quad (17^*)$$

$$\times \left[\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^1_{z+1/2} \times 1{,}605136437 - \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_{j+1} 1.3\right] +$$

$$+ (K_p)_{j+1} 1.3;$$

$$(D_p)^0_z = \frac{(W_p)^0_z - (W_p)^N_z}{(\Phi_p)^0_я - (\Phi_p)^N_я} - \text{const}; \quad (18^*)$$

$$(W_i)^0_z = 0{,}34 - W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^0_z 2.3; \quad (19^*)$$

$$(\overline{\Phi}_p)^m_z = \frac{(K_p)^{m-1}_{z+1/2} \cdot (\overline{\Phi}_p)^{m-1}_{z+1} + (K_p)^{m-1}_{z-1/2} \times (\overline{\Phi}_p)^{m-1}_{z-1} + (D_p)^{m-1}_z \cdot \frac{\Delta z^2}{\Delta t} \cdot (\overline{\Phi}_p)^\tau_я}{(K_p)^{m-1}_{z+1/2} + (K_p)^{m-1}_{z-1/2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta t} \cdot (D_p)^{m-1}_я}. \quad (20^*)$$

Далее повторяем итерации до m = M – 1, M и с учетом требуемой точности δ^*_p и δ^{**}_p, получим требуемое решение $(\overline{\Phi}_p)^M$, $(W_p)^M_z$,

$(W_i)_z^M$ не забывая, что при всех итерациях остаются постоянными $(K_p)^{\tau}_{9+1/2} = 0{,}0000$ м/сут и $(\overline{\Phi}_p)_0^{\text{гран.}}$ или $(\overline{\Phi}_p)_1^{\text{гран}}$.

Напомним, что итерационное решение надо осуществлять от расчетной верхней граничной точки z = 10 до нижней граничной точки z = 0, т. е. определять значения требуемых величин в 9, 8, ... 1, соответствующим определенным z_z координатам. Затем, повторяясь от z = 9 до 1, т. е. за одну итерацию проводится рекомендуемых вычислительных операций, равных количеству расчетных точек.

Программа вычислительных операций была выполнена Д. А. Ситниковым. Алгоритм последовательности реализации, согласно вышеуказанной методике вычислений с точностью до 0,000000001, записан на языке C++, пригодном для компьютеров любого типа.

Была осуществлена серия прогнозных задач по устойчивому и сходимому решению принятой системы миграционных уравнений при разных исходных параметрах, начальных и граничных условиях I и II родов. При этом, кроме приведенных формул, опробовались несколько иных расчетных схем. Выборочно, в виде показательных, изложим результаты, подтверждающие пригодность рассматриваемой явной схемы.

В табл. 2 представлены изменения объемной влажности, если предположить, что первоначальными относительными объемными влажностями были значения $(W_p)^{\tau}_z$ 1.3 при отсутствии влияния керосина, затем указанная влажность уменьшилась из-за предполагаемого быстрого покрытия водной поверхности слоем адсорбированного углеводорода за счет газообразного приноса его 100%-но насыщенных паров через воздушное пространство пор, что привело к снижению поверхностного натяжения воды с $\sigma_{1.3} = 72{,}75 \cdot 10^{-3}$ Н/м до $\sigma_{2.3} = \sigma_{1.3} - \sigma_{1.2} = (72{,}75 - 27{,}4) \cdot 10^{-3} = 45{,}35 \cdot 10^{-3}$ Н/м. Возможность такого явления подтверждается экспериментом [4, 7] и определяет так называемое насыщенное состояние поверхности воды $(\sigma_{2.3})_{\text{насыщ}}$. Учитывая, что за основу расчета принимаются экспериментальные графики изменения воды $W_p\left(\frac{p_{\text{вс}}}{\gamma_p}\right)1.3$

и поскольку при $W_i = 0$ $W_p\left(\frac{p_{\text{вс}}}{\gamma_p}\right)2.3 = W_p\left(\frac{p_{\text{вс}}}{\gamma_p}\right)1.3$,

то $\left(\frac{p_{\text{вс}}}{\gamma_p}\right)1.3 = \left(\frac{p_{\text{вс}}}{\gamma_p}\right)2.3 \cdot \frac{1}{\beta_{2.3}} = 1{,}605136\left(\frac{p_{\text{вс}}}{\gamma_p}\right)2.3$,

так как $\rho_{2.3} = \frac{\sigma_{1.3} - \sigma_{1.2}}{\sigma_{1.3}}$, т. е. $\beta_{2.3} = 0{,}623$.

Отмечается снижение относительной объемной влажности в расчетных точках, составляя для всей грунтовой толщи $\sum_0^{10}(W_p)_z \cdot (V_p)_z = 0{,}4091 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}8182$ м^3, т. е. $(V_p)_z = \Delta z \times 1 \cdot 1$ м^3.

В табл. 3 приведены результаты итерационных расчетов $(\Phi_i)_z^N$ и $(W_i)_z^N$ по ранее рекомендованной методике при исходных $(W_p)^{\tau}_z$ 2.3, являющихся постоянными для всех итерационных расчетов "n", а также времен "Δt", учитываемых при оценке параметра $\frac{\Delta z^2}{\Delta t}$.

Таблица 2. **Первоначальные значения исходных параметров для физико-математического моделирования совместной миграции в грунтах жидких керосина и подземной влаги**

Z, м	z	$(\Phi_p)^{\tau}_z$	$\left(\frac{p_{\text{вс}}}{\gamma_p}\right)^{\tau}_z 2.3$	$(W_p)^{\tau}_z 2.3$	$(W_i)^{\tau}_z$	$\left(\frac{p_{\text{вс}}}{\gamma_p}\right)^{\tau}_{z.} 2.3$	$(W_p)^{\tau}_z 1.3$	$\left(\frac{p_{\text{вс}}}{\gamma_p}\right)^{\tau}_{z.} 1.3$	$(W_p)^{\tau}_z 1.3 - (W_p)^{\tau}_z 2.3$
2,00	10	0,4	-2,5682176	0,0264833	0,0	-1,60	0,0384893	-1,60	0,012001
1,80	9	0,4	-2,2471904	0,0302273	0,0	-1,40	0,0410425	-1,40	0,0108152
1,60	8	0,4	-1,9261632	0,0343255	0,0	-1,80	0,049875	-1,20	0,0155495
1,40	7	0,4	-1,605136	0,038437	0,0	-1,00	0,053250	-1,00	0,014863
1,20	6	0,4	-1,2841088	0,0426133	0,0	-0,80	0,109999	-0,80	0,0673866
1,00	5	0,4	-0,9630816	0,0566685	0,0	-0,60	0,224750	-0,60	0,1680815
0,80	4	0,4	-0,6420544	0,2024611	0,0	-0,40	0,308000	-0,40	0,1055389
0,60	3	0,4	-0,3210272	0,3181085	0,0	-0,20	0,333000	-0,20	0,0148915
0,40	2	0,4	-0,000000	0,340000	0,0	0,00	0,340000	0,00	0, 000000
0,20	1	0,4	0,3210272	0,340000	0,0	0,20	0,340000	0,20	0, 000000
0,00	0	0,4	0,6420544	0,340000	0,0	0,40	0,340000	0,40	0, 000000

Т а б л и ц а 3. **Основные результаты итерационных расчетов уравнения миграции керосина**

Координата	№	τ	0		$\Delta t = \infty \approx 10^6$ сут, $\frac{\Delta z^2}{\Delta t} = 0$		$\Delta t = 0{,}1$ сут, $\frac{\Delta z^2}{\Delta t} = 0{,}4$ м²/сут		$\Delta t = 0{,}5$ сут, $\frac{\Delta z^2}{\Delta t} = 0{,}8$ м²/сут	
					205	< 205	31	< 31	1000	<1000
Z, м	z	$(W_p)_z^\tau$ 2.3	$(\Phi_i)_z^0$	$(W_i)_z^0$	$(\Phi_i)_z^N$	$(W_i)_z^N$	$(\Phi_i)_z^N$	$(W_i)_z^N$	$(\Phi_i)_z^N$	$(W_i)_z^N$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2,00	10	0,026488	2,000000	0,3135	2,000000	0,313512	2,000000	0,3135	2,000000	0,31351
1,80	9	0,030227	0,640548	0,0000	2,000000	0,3098	1,730331	0,3079	1,68283	0,2995
1,60	8	0,0343255	0,606184	0,0000	2,000000	0,3057	1,460003	0,2900	1,35584	0,2512
1,40	7	0,038437	0,571821	0,0000	2,000000	0,3016	1,199915	0,2710	1,053188	0,1481
1,20	6	0,0422613	0,537456	0,0000	2,000000	0,2974	0,879008	1,1704	0,537519	0,0000
1,00	5	0,056669	0,503092	0,0000	2,000000	0,2843	0,625783	0,0922	0,503092	0,0000
0,80	4	0,2024611	0,468728	0,0000	2,000000	0,1375	0,500602	0,0327	0,468728	0,0000
0,60	3	0,3181085	0,434364	0,0000	2,000000	0,0219	0,434365	0,0000	0,434364	0,0000
0,40	2	0,340000	0,40000	0,0000	2,000000	0,000000	0,4	0,0000	0,400000	0,0000
0,20	1	0,340000	-	0,0000	2,000000	0,000000	-	0,0000	-	0,0000
0,00	0	0,340000	-	0,0000	2,000000	0,000000	-	0,0000	-	0,0000

Окончание табл. 3

Координата	№	$\Delta t = 0{,}4$ сут, $\frac{\Delta z^2}{\Delta t} = 1{,}0$ м²/сут		$\Delta t = 0{,}04$ сут, $\frac{\Delta z^2}{\Delta t} = 1{,}0$ м²/сут		$\Delta t = 0{,}01$ сут, $\frac{\Delta z^2}{\Delta t} = 4{,}0$ м²/сут		$\Delta t = 0{,}001$ сут, $\frac{\Delta z^2}{\Delta t} = 10{,}0$ м²/сут		$\Delta t = 0{,}001$ сут, $\frac{\Delta z^2}{\Delta t} = 10{,}0$ м²/сут	
		24	< 24	33	< 33	9	9	10	10	13	13
Z,м	z	$(\Phi_i)_z^N$	$(W_i)_z^N$	$(\Phi_i)_z^N$	$(W_i)_z^N$	$(\Phi_i)_z^N$	$(W_i)_z^N$	$(\Phi_i)_z^N$	$(W_i)_z^N$	$(\Phi_i)_z^N$	$(W_i)_z^N$
1	2	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
2,00	10	2,000000	0,313512	2,000000	0,313512	2,000000	0,31351	2,000000	0,31351	2,00000	0,313512
1,80	9	1,654843	0,2929	1,654520	0,2929	1,397769	0,0429	0,641537	0,0000	1,219897	0,0148
1,60	8	1,276520	0,176150	1,295444	0,1957	0,606184	0,0000	0,60615	0,0000	0,606185	0,0000
1,40	7	0,571821	0,0000	0,960538	0,0514	0,571881	0,0000	0,57182	0,0000	0,571825	0,0000
1,20	6	0,537456	0,0000	0,537456	0,0000	0,53456	0,0000	0,531454	0,0000	0,537456	0,0000
1,00	5	0,503092	0,0000	0,503092	0,0000	0,503052	0,0000	0,503092	0,0000	0,503092	0,0000
0,80	4	0,468728	0,0000	0,468728	0,0000	0,468729	0,0000	0,468728	0,0000	0,468728	0,0000
0,60	3	0,434364	0,0000	0,434364	0,0000	0,437364	0,0000	0,434336	0,0000	0,434364	0,0000
0,40	2	0,400000	0,0000	0,400000	0,0000	0,400000	0,0000	0,400000	0,0000	0,400000	0,0000
0,20	1	-	0,0000	-	0,0000	-	0,0000	-	0,0000	-	0,0000
0,00	0	-	0,0000	-	0,0000	-	0,0000	-	0,0000	-	0,0000
		Ручной счет		Машинный счет		Ручной счет		Ручной счет		Машинный счет	

Примечание: $\delta_i^* \left|(\Phi_i)_z^{N-1} - (\Phi_i)_z^N\right| \le 0{,}0001$; $\delta_i^{**} \left|(W_i)_z^{N-1} - (W_i)_z^N\right|_i \le 0{,}001$.

Результаты расчетов несомненно указывают на устойчивую сходимость исследуемой расчетной явной конечноразностной формулы. Обратим внимание, что сходимость решения для разных Δt происходит при разном количестве итераций n = = 10–1000. Сравнение не совпадающих результатов, полученных ручным способом и выполненных цифровой вычислительной машиной, указывает на проявление некоторых субъективных ошибок. При этом устойчивая сходимость более свойственна прогнозным расчетам относительного объемного содержания керосина (W_i), по сравнению с прогнозируемой функцией (Φ_i).

В табл. 4 представлены окончательные решения при t = ∞, т. е. $\frac{\Delta z^2}{\Delta t} = 0$. Напомним, что предложенная методика прогнозных расчетов предусматривает решение уравнения влагопереноса при постоянных по времени и итерациям $\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)_z^N$ на основании ранее проведенных конечноразностных решений по явной схеме при постоянных объемных влагосодержаниях. Таким образом, полученные результаты являются именно окончательным решением системы уравнений совместной миграции изучаемых жидкостей. В общем случае для бесконечного времени характерно отсутствие движения веществ, находящихся в равновесном состоянии. Собственно природные процессы являются обычно неравновесными.

Напомним, что в табл. 4 результаты получены при граничных условиях постоянных для всех m-х итераций $(\overline{\Phi})_0^{гран.} = (\overline{\Phi})_1^{гран} =$ = 1,568000 м или 1,168000 м. Кстати, решения в табл. 4 являются теоретически предс-

Таблица 4. **Окончательное решение уравнения совместной миграции влаги и керосина в полностью насыщенных грунтах при $\Delta t = \infty$ и разных $\overline{\Phi}_p$ – const по z**

Z,м	z	$(\overline{\Phi}_p)^M_z$	$\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_p}\right)^N_z$	$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^M_z$	$W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^N_z 2.3$	$(W_i)^M_z$	$(\overline{\Phi}_p)^M_z$	$\left(\frac{p_{изб}}{\gamma_p}\right)^N_z$	$\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^N_z 2.3$	$(W_p)^M_z 2.3$	$(W_i)^N_z$
2,00	10	1,568000	0,000000	-0,438000	0,1714	0,1685	1,168000	0,000000	-0,832000	0,0342	0,3058
1,80	9	1,568000	0,146000	-0,378000	0,22118	0,1188	1,168000	0,146000	-0,778000	0,0431	0,2687
1,60	8	То же	0,292000	-0,324000	0,2638	0,0760	-„-	0,292000	-0,724000	0,0444	0,2956
1,40	7	-„-	0,438000	-0,270000	0,2978	0,0400	-„-	0,438000	-0,670000	0,0480	0,2920
1,20	6	-„-	0,584000	-0,216000	0,3258	0,0080	-„-	0,584000	-0,616000	0,0541	0,2286
1,00	5	-„-	0,730000	-0,168000	0,3258	0,0000	-„-	0,730000	-0,568000	0,0707	0,2693
0,80	4	-„-	0,876000	-0,108000	0,3361	0,0000	-„-	0,876000	-0,508000	0,1038	0,2362
0,60	3	-„-	1,220000	-0,054000	0,3400	0,0000	-„-	1,220000	-0,454000	0,1056	0,1444
0,40	2	-„-	1,168000	0,000000	0,3400	0,0000	-„-	1,168000	-0,400000	0,2025	0,1375
0,20	1	-„-	-	0,200000	0,3400	0,0000	-„-	-	-0,200000	0,3156	0,0244
0,00	0	-„-	-	0,400000	0,3400	0,0000	-„-	-	-0,000000	0,3400	0,0000

Примечание: $\overline{\Phi}_p = \left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)2.3 + \left(\frac{p_{изб}}{\gamma_p}\right) + z_z$; $W_i = 0{,}34 - W_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)2.3$.

казуемыми, т. е. подтверждается сходимость решения по рекомендуемой методике с тестовым.

Чтобы оценить количество m-х итераций, воспользуемся результатами решений при постоянной $K_p\left(\frac{p_{вс}}{\gamma_p}\right)^m_{1/2} = 0$, но при условии, что $(\overline{\Phi})^m_0 = (\overline{\Phi})^m_1$, а также $(K_p)_{9+1/2} = 0$ – – const и $(\overline{\Phi})^m_{10} = (\overline{\Phi})^m_9$. Эти расчетные прогнозные результаты показывают, что стабилизация $(\overline{\Phi}_p)_z$ с точностью 0,0001 происходит при $m \approx 100$.

Таким образом, следует признать рекомендуемую методику конечноразностных прогнозных решений исходной системы уравнений совместной миграции жидких воды и легких углеводородов достоверной по причине устойчивой сходимости к однозначному результату с высокой точностью по сравнению с теоретически доказуемым. Косвенно на достоверность также указывают размер принятого нами дискретного пространства $\Delta z = 0{,}2$ м, почти равного компетентному размеру грунта ($\approx 0{,}1$ м), а также незначительное количество итерации n и m. По-видимому, ошибки за счет дискретизации пространства и времени в нашем случае достаточно приемлемы. В то же время наши математические эксперименты, не приведенные в настоящей работе (см. [3, 4]), показывают, что несколько по-иному обстоит дело с оценкой дискретности граничных условий и исходных параметров грунтов (особенно нелинейных зависимостей объемного содержания и коэффициентов массопереноса жидкой влаги от так называемого всасывающего давления). Для учета их дискретности предлагается воспользоваться их крайне возможными значениями, заведомо определяющими оптимистические и пессимистические результаты решений.

В заключение отмечу, что нами исследовался также ряд иных конечноразностных схем. Однако рекомендуемая в настоящей работе расчетная, явная конечноразностная схема решения является наиболее эффективной с точки зрения не только достоверности (устойчивой сходимости), но также трудоемкости вычислений, в частности количества итерационных решений.

Список литературы

1. *Огняник Н. С., Парамонова Н. К., Брикс А. Л. и др.* Основы изучения загрязнения геологической среды легкими нефтепродуктами. – Киев.: А.П.Н., 2006. – 279 с.
2. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
3. *Ситников А. Б., Водолазкий В. И.* Особенности решения типовых прогнозных задач двухмерного нелинейного влагосодержания в грунтах // Геол. журн. – 2009. – № 4. – С. 92 – 98.
4. *Ситников А. Б*. Вопросы миграции веществ в грунтах. – Киев, 2010. – 640 с.
5. *Ситников А. Б*. Обоснование математических моделей совместной миграции влаги и легких нефтепродуктов в ненасыщенно-насыщенных грунтах // Геол. журн. – 2011. – № 1. – С. 111–119.
6. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
7. *Фролов Ю. Г.* Курс коллоидной химии (поверхностные явления и дисперсные системы). – М.: Химия, 1982. – 400 с.

Ин-т геол. наук НАН Украины,
Киев
E-mail: geoj @ bigmir.net

Статья поступила
07.06.13